Studi qualitativi per problemi di Cauchy

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi II

Richiami di teoria

Problema di Cauchy

- $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, limitato o no,
- $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$,
- $f : I \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$

Dati $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathcal{Y}$ si ha il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con y definita e derivabile in un opportuno intorno $I(t_0) \subset I$ di t_0.

Problemi:

- condizioni sufficienti su f in modo che esista (e sia unica) una soluzione $y : I(t_0) \to \mathbb{R}$;
- determinare "quanto è grande" $I(t_0)$

Teorema di esistenza e unicità locale

Sia $A = I \times \mathcal{Y}$. Se

$$\begin{aligned} &\bullet\ f : A \to \mathbb{R} \ \text{ è continua su } A \\ &\bullet f : A \to \mathbb{R} \ \text{ è derivabile risp. a } y \text{ su } A \\ &\frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R} \ \text{ è continua su } A \end{aligned} \tag{1}$$

allora per ogni $(t_0, y_0) \in A$

$$\exists \delta > 0 \ \exists! \, u : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R} \ \text{ di classe } C^1$$

$$\text{soluz. del problema di Cauchy}$$

Osservazioni:

- La condizione su $\frac{\partial f}{\partial y}$

  può essere indebolita: sufficiente che

$$\exists\, L > 0 \;:\; |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall\,(t,y_1),\,(t,y_2) \in A.$$

  cioè $y \mapsto f(t,y)$ ha rapporto increment. limitato
- **unicità:** ogni altra soluz. su $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ coincide con u.

- Se $v : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ risolve

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_1 \end{cases}$$

i grafici di u e di v **NON** si intersecano mai:

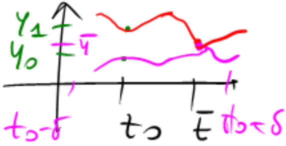
$$u(t) < v(t) \quad \forall\, t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta],$$

oppure

$$u(t) > v(t) \quad \forall\, t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

Infatti, se esistesse $\bar{t} \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ con

$$u(\bar{t}) = v(\bar{t}) = \bar{y},$$



il prob. di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(\bar{t}) = \bar{y} \end{cases}$$

avrebbe **DUE** soluzioni locali!!!

- nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale, si può prolungare la soluzione, definendo l'*intervallo massimale di esistenza*

$$
\begin{gathered}
(T_{\min}, T_{\max}), \\
T_{\max} = \sup\{T : \text{ soluz. esiste in } [t_0, T]\} \\
T_{\min} = \inf\{T : \text{ soluz. esiste in } [T, t_0]\}
\end{gathered}
$$

Teorema di esistenza globale

Sia
$$\mathcal{Y} = \mathbb{R} \quad \text{e quindi} \quad A = I \times \mathbb{R}.$$

Se valgono

- le ipot. del teor. di esistenza e unicità locale,
- e inoltre
$$\exists k_1,\, k_2 \geq 0 \;:\; |f(t,y)| \leq k_1 + k_2|y| \;\forall\, t \in I, \tag{2}$$

allora per ogni $(t_0, y_0) \in A$ **la** soluzione del corrispondente problema di Cauchy è definita **su tutto** I.

Osservazione: sufficiente che la (2) valga lungo la soluzione: se u è soluzione locale su $(T_{\min}, T_{\max})$ e

$$\exists k_1,\, k_2 \geq 0 \;:\; |f(t,u(t))| \leq k_1 + k_2|u(t)| \;\forall\, t \in (T_{\min}, T_{\max}),$$

allora

$$(T_{\min}, T_{\max}) = I.$$

Strategia generale per dimostrare la limitatezza delle soluzioni

- determinare le *soluzioni stazionarie* dell'equaz., cioè le funzioni costanti
$$y(t) \equiv c \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$
ove c è uno zero, rispetto ad y, della funzione $f(t, y)$, cioè $f(t, c) \equiv 0$.
Chiaramente $y(t) \equiv c$ è soluz. dell'equaz., poiché
$$y'(t) \equiv (c)' \equiv 0 \equiv f(t, c) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$
- confrontare la soluzione locale con le soluz. stazionarie, ricordando il teor. di $\exists!$ locale.

Il teorema dell'asintoto

Se $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ è derivabile e

$$\exists \lim_{t \to +\infty} f(t) = l \in \mathbb{R} \quad \text{e}$$
$$\exists \lim_{t \to +\infty} f'(t) = m \in [-\infty, +\infty]$$

Allora $m = 0$.

Un analogo enunciato vale per una funzione derivabile

$$f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$$

sostituendo ai limiti a $+\infty$ i corrispondenti limiti a $-\infty$.

Proprietà di parità/disparità

- Se
$$f(-t, y) = -f(t, y)$$
allora ogni soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
è pari, cioè $y(t) = y(-t)$.
- Se
$$f(-t, y) = f(t, -y)$$
allora ogni soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
è dispari, cioè $y(-t) = -y(t)$.